Capitolo 1

TEORIA DEL CAOS

1.1 Introduzione

Il 29 dicembre 1979, il fisico Edward Lorenz [LOR79] presentò alla Conferenza annuale dell'*American Association for the Advancement of Science*, una relazione in cui ipotizzava come il battito delle ali di una farfalla in Brasile, a séguito di una catena di eventi, potesse provocare una tromba d'aria nel Texas. L'insolita quanto suggestiva relazione, diede il nome al cosiddetto *butterfly effect*, effetto farfalla.

Nel corso di un programma di simulazione del clima, Lorenz fece un'inaspettata quanto importante scoperta. Una delle simulazioni climatiche si basava su dodici variabili, incluse relazioni non lineari. Lorenz scoprì che, ripetendo la stessa simulazione con valori leggermente diversi, una serie di dati veniva prima arrotondata a sei cifre decimali, e successivamente a tre, l'evoluzione del clima elaborata dal computer si discostava nettamente dai risultati precedenti: a quella che si configurava appena una perturbazione, dopo un'effimera somiglianza iniziale, si sostituiva un modello climatico completamente diverso.

Queste osservazioni hanno portato allo sviluppo della Teoria del Caos che pone limiti definiti alla prevedibilità dell'evoluzione di sistemi complessi non lineari. Nei sistemi lineari, una piccola variazione nello stato iniziale di un sistema fisico, chimico, biologico, o economico provoca una variazione corrispondentemente piccola nel suo stato finale: per esempio, colpendo leggermente più forte una palla da biliardo, questa andrà più lontano.

Al contrario, sono non lineari le situazioni di un sistema in cui piccole differenze nelle condizioni iniziali producono differenze non prevedibili nel comportamento successivo. Un sistema può anche comportarsi in modo caotico in certi casi e in modo non caotico in altri.

Per esempio, da un rubinetto non chiuso le gocce cadono in una sequenza regolare, variando leggermente l'apertura del rubinetto, si può far sì che le gocce cadano invece in modo irregolare, appunto caotico. E' impossibile prevedere il comportamento che un sistema caotico avrà dopo un intervallo di tempo anche piuttosto breve. Infatti, per calcolare il comportamento futuro del sistema, anche se descritto da un'equazione molto semplice, è necessario inserire i valori delle condizioni iniziali.

D'altra parte, nel caso di un sistema complesso non lineare, data la grande sensibilità del sistema agli agenti che lo sollecitano, un piccolo errore nella misura delle condizioni iniziali, oppure una modifica apparentemente irrilevante dei dati immessi ed ovviamente anche il loro successivo arrotondamento durante il calcolo, cresce esponenzialmente con il tempo, producendo un radicale cambiamento dei risultati.

Questo significa che i dati relativi alle condizioni iniziali dovrebbero essere misurati con un'accuratezza teoricamente infinita, ma ciò é praticamente impossibile. Quanto detto spiega perché le previsioni meteorologiche, sebbene descritte con le equazioni deterministiche della fisica, fluidodinamica e termodinamica, ed elaborate con raffinate tecniche di calcolo eseguite da super computer, producono risultati molto approssimativi. I processi atmosferici, d'altra parte, sono estremamente vari e complessi, in quanto comprendono fenomeni limitati e di breve durata come temporali e trombe d'aria, e fenomeni estesi per migliaia di chilometri come i sistemi monsonici, stabili per alcuni giorni o mesi.

Per rappresentare l'atmosfera sono necessari sei milioni di numeri e questo comporta i problemi connessi alle misurazioni. Gli strumenti a terra sono molto accurati, ma le sonde in quota possono rilevare la temperatura con un errore di un grado; i satelliti pagano lo scotto di sondare spazi altrimenti irraggiungibili con errori anche di due gradi.

L'effetto farfalla in conclusione, sottolinea come nella maggior parte dei sistemi biologici, chimici, fisici, economici e sociali, esistano degli elementi che, apparentemente insignificanti, sono in grado, interagendo fra loro, di propagarsi e amplificarsi provocando effetti catastrofici. Questi elementi, e perché trascurati, e perché imprevedibili, e perché non individuabili, costituiscono il dilemma del nostro secolo giacché, come abbiamo visto, possono condurci a conclusioni errate. Ecco il motivo per cui molto spesso, ad esempio, per spiegare il comportamento di un sistema come la crescita della popolazione, l'eutrofizzazione delle coste marine, o le variazioni climatiche, si ricorre ad un modello.

Un modello è una riproduzione semplificata della realtà, ossia un'astrazione che considera solamente le principali caratteristiche di quello che è il reale oggetto di studio. Tuttavia, un modello, sebbene possa sembrare limitato, in quanto non riproduce completamente la realtà, permette di esaminare gli aspetti piú importanti di un problema.

E non è poco: se considerassimo tutti i dettagli di un problema, ottenendo quello che si definisce una simulazione come quella meteorologica, ci troveremmo ad affrontare un insieme di dati difficilmente correlabili tra loro e quindi la loro analisi ci sarebbe impossibile o di utilità limitata all'analisi di brevi periodi, come appunto per le simulazioni climatiche.

Certo, come abbiamo visto, un modello non può offrire garanzie di sicurezza assoluta ma è comunque un indispensabile strumento per il progresso della scienza e della tecnologia. Per convincersene, basta pensare che l'uso di un modello è del tutto naturale. Ad esempio, quando usciamo da casa per recarci al lavoro o per una gita, ci formiamo mentalmente l'idea del percorso che seguiremo, con la sosta per il giornale, o per il caffè, ma certo non prenderemo in considerazione la possibilità che un condor atterri sul tetto della nostra auto o altri eventi improbabili. Automaticamente il pensiero opera una semplificazione della realtà per poter elaborare delle conclusioni su di lei.

Dalla scoperta di Lorenz molto cammino è stato compiuto in tutte le branche del sapere. Tra tutte le definizioni create sul 1900, una sembra la più significativa: il 1900 è il secolo delle Rivoluzioni. Dopo la Relatività e la Meccanica Quantistica, la rivoluzione più importante è la scoperta della teoria del Caos.

Essa ha investito spazi come quello dei matematici, una volta isolati e gelosi delle proprie scoperte, dei fisici, dagli studiosi della meccanica dei liquidi, agli astronomi, dei chimici e degli studiosi di etologia, degli informatici e di quanti si occupano di crittografia, dei cardiologi, degli analisti, dei chirurghi, degli studiosi del comportamento nell'organizzazione aziendale, nella comunicazione o nella geriatria.

In tutte le discipline lo studio del Caos ha dato conferme sorprendenti e sorprendenti ne sono state finora le conseguenze applicative. Gli studi di tutti gli scienziati dimostrano che il comportamento naturale dei fenomeni è non lineare, anzi che *la vita stessa è possibile perché c'è il caos*.

Diamo ora quindi una descrizione della teoria del Caos, o meglio la teoria dei Sistemi Dinamici non lineari. I comportamenti della maggioranza dei fenomeni della natura e dell'uomo non procedono con ritmi che si ripetono, ma, dopo un periodo regolare, presentano in modo inaspettato una biforcazione in un punto critico che si moltiplica fino a generare una turbolenza. Un flusso regolare si scompone in vortici e mulinelli. Strutture irregolari interrompono la continuità del confine tra fluido e solido, per esempio quando il liquido si ghiaccia [GLE87].

La turbolenza genera entropia: mescolanza, disordine, causalità. Tuttavia, le parti scomposte, i vortici nel moto dei fluidi, non fuggono via, ma restano vicini, pur seguendo regole proprie.

Ciò avviene per un fenomeno che dà luogo ai cosiddetti attrattori strani. Esso mescola ordine e disordine, rendendo, pur nella complessità, misurabile l'entropia. Dunque la turbolenza si produce restando all'interno di una fase. Gli studiosi si sono occupati di tale questione, non solo per interessi matematici o speculativi, ma per risolvere problemi concreti, come la cura delle cardiopatie gravi, aritmie, o la stabilità del volo degli aerei.

Alla fine dell'intero processo si produce un'autoorganizzazione in una situazione nuova, che a sua volta può riprodurre un altro momento caotico e così via. Ciò, come abbiamo già detto, è impredicibile, sebbene si sappia che avviene in forma rigorosa e deterministica. Lo sviluppo così veloce dei computer che consentono migliaia e migliaia di calcoli fa ogni giorno progredire lo studio di tale materia.

Nella vita della natura pochi sono i fenomeni lineari, mentre quelli caotici dominano. Caotiche sono le nuvole, i fiocchi di neve e le cascate, sono caotici i liquidi nella loro dinamica, dunque è caotico il movimento del cuore, che è la pompa di un liquido, il sangue, contrariamente a quanto si pensava, un cuore sano ha ritmo caotico, mentre in un cuore malato il ritmo appare sempre più regolare: descriveremo in seguito in dettaglio questo fenomeno. La salute è caotica, la malattia è lineare. Il Caos agisce, come si può ben constatare, nel campo dell'economia: i crolli delle Borse sono fenomeni caotici.

1.2 Autoorganizzazione e sistemi non lineari

Uno degli aspetti più interessanti dello studio della dinamica dei sistemi non lineari è l'organizzazione che emerge spontaneamente dall'interazione di molte componenti elementari [PIZ02]. Un classico esempio è quello di un fluido riscaldato dal basso dove in presenza di opportune condizioni al contorno i moti convettivi delle molecole si dispongono secondo le cosiddette colonne di Bénard, che sono formazioni verticali a nido d'ape.

Si instaura cioè un'inattesa cooperazione tra molecole laddove sarebbe atteso semplicemente un aumento del disordine molecolare. I sistemi complessi reagiscono alle modificazioni dell'ambiente esterno riorganizzandosi in modo da esibire proprietà innovative. L'autoorganizzazione, infatti, è una struttura spazio-temporale che non è imposta dall'esterno ma emerge spontaneamente dall'evoluzione del sistema stesso come funzione della sua dinamica. L'organizzazione emergente è osservabile ad una scala spazio-temporale diversa, molto maggiore, da quella molecolare.

La costruzione di modelli matematici per tali sistemi evidenzia che le equazioni che li reggono sono in genere estremamente sensibili alle condizioni iniziali, in modo che fluttuazioni estremamente piccole danno luogo a storie dinamiche completamente diverse, come visto nel paragrafo precedente a proposito dell'effetto farfalla.

Questo indeterminismo di fatto, ma non di principio, non è eliminabile, dato che in un sistema numerico è comunque necessario fissare un certo grado di precisione non infinito e qualsiasi grado anche più alto di precisione produrrà storie dinamiche differenti. Questo è il cosiddetto *caos deterministico*, dove il sistema ha un comportamento complessivamente regolare ma irregolare nel dettaglio, e quindi è impossibile prevedere il suo comportamento negli istanti futuri.

Definiamo il caos come *un comportamento non predicibile di un sistema dinamico deterministico a causa della sua sensibilità alle condizioni iniziali* [GLE87].

Come si è visto, il comportamento di un sistema dinamico deterministico è predicibile una volta note le condizioni iniziali. Ma esistono casi in cui a seconda della precisione con cui si misurano le condizioni iniziali, il moto del sistema si comporta in modo assai diverso.

Più precisamente, un insieme *S* esibisce sensibilità ai valori iniziali se esiste una ρ, tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni x in *S*, esiste un y tale che $|x - y| < \varepsilon$, e $|x_n - y_n| > \rho$ per qualche n>0. Allora esiste una distanza fissa *r* tale che, per quanto precisamente si specifichi uno stato iniziale, ci sono stati vicini che alla fine si allontanano di una distanza *r*. Questo è ciò che avviene nei sistemi caotici. Un sistema caotico esibirà quindi sensibilità alle condizioni iniziali, comportandosi in modo complesso.

1.3 Complessità e non linearità

Nell'approccio tradizionale i sistemi complessi vengono trattati analiticamente, ossia riducendoli alla combinazione lineare di elementi più semplici. Una classica relazione lineare è quella della legge di Hook:

$$y = ax + b$$

dove y esprime la lunghezza e x la forza applicata che regola la forza elastica. Quando l'elasticità viene meno, tendendo molto l'elastico, il grafico cessa di essere lineare. Il sistema non è più lineare, e mostra in determinate circostanze un cambiamento repentino di comportamento in cui l'elastico si spezza.

In natura, molti sistemi sono lineari o approssimabili alla linearità, e grazie alla trasformata di Fourier per cui ogni funzione matematica periodica può essere rappresentata da una serie di onde sinusoidali pure, si è giunti alla modellizzazione di moltissimi fenomeni naturali. Per moltissimi sistemi fisici la linearità non è sostenibile, e la loro modellizzazione diviene estremamente complessa: quasi tutti i sistemi dinamici sono caotici, quindi non intrinsecamente indeterministici, ma di fatto non predicibili [KAP95] [JAC89].

L'elaborazione di pattern spazio-temporali fortemente tempo-varianti e strettamente non lineari, quali quelli provenienti dall'acquisizione di dati del mondo reale, rappresenta una problematica di crescente importanza, e la sua complessità comporta necessariamente l'uso e lo sviluppo di strumenti evoluti.

1.4 Non linearità e sistemi dinamici

Introducendo la non linearità, possiamo affermare che le funzioni lineari si comportano in modo tale che:

$$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$$

nei casi in cui non vale questa eguaglianza, e qui entra in gioco la non linearità, tutto diviene matematicamente più difficile. Ad esempio se

$$f(x) = 0 \text{ e } f(y) = 0$$

e per ogni a e b non vale più $f(ax+by) = 0$ perciò la soluzione va cercata con metodi speciali. Nessun modello reale è veramente lineare, ma spesso si può approssimare ad una funzione lineare. I sistemi non lineari esibiscono effetti complessi non deducibili con metodi lineari, caratteristica particolare dei sistemi dinamici.

Un sistema si dice *sistema dinamico* quando esprime la variabilità di uno stato, ossia un punto in uno spazio vettoriale, nel tempo:

$$dX/dt = F(X,t) \qquad [1]$$

$$F: W \subset R^n \rightarrow R^n \quad \text{differenziabile}$$

La soluzione del sistema è l'insieme delle traiettorie in funzione delle condizioni iniziali. Un sistema dinamico è completamente definito da uno spazio delle fasi o degli stati, le cui coordinate lo descrivono in ogni istante, e da una regola che specifica l'andamento futuro di tutte le variabili di stato. I sistemi dinamici sono deterministici se esiste un unico conseguente per ciascuno stato, stocastici se ne esistono diversi con una certa distribuzione di probabilità come il classico lancio di una moneta.

Lo spazio delle fasi è la collezione di tutti i possibili stati di un sistema dinamico. Può essere finito, come nel caso della moneta in cui abbiamo due stati, o infinito se le variabili sono numeri reali.

Ad esempio, un automa cellulare è un sistema dinamico con tempo discreto, spazio geometrico discreto, e spazio degli stati discreto *s (i,j)*, dove *i* rappresenta le coordinate spaziali e *j* il tempo, mentre la regola di aggiornamento sarà:

$$s\ (i,j+1) = f(s)$$

1.5 Descrizione formale di un sistema dinamico

Matematicamente, un sistema dinamico è descritto da un problema ai valori iniziali. La traiettoria nello spazio delle fasi tracciata da una soluzione di un problema ai valori iniziali è chiamata traiettoria del sistema dinamico. Definiamo traiettoria costante una soluzione costante $x(t) = x(0)$ di [1], ossia un vettore $x(0)$ per il quale ciascuna componente della parte destra di [1] è zero. Una traiettoria costante è detta *stabile* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) deve esistere un numero positivo ε, tale che, ogni traiettoria che parte all'interno di ε di $x(0)$, deve avvicinarsi asintoticamente a $x(0)$.

b) per ogni numero positivo ε, deve esistere un numero positivo $\delta(\varepsilon)$, tale che, una traiettoria sia garantita stare entro ε di $x(0)$ semplicemente richiedendo che abbia inizio entro $\delta(\varepsilon)$ di $x(0)$.

c) l'insieme di tutti i punti che possono essere stati iniziali di traiettorie che si avvicinano asintoticamente ad una traiettoria stabile è detto regione di attrazione della traiettoria stabile.

Definiamo *ciclo limite*, o *attrattore ciclico*, tra l'altro analizzato dettagliatamente nel terzo capitolo, una curva chiusa nello spazio n-dimensionale con le seguenti proprietà:

a) nessuna traiettoria costante è contenuta nel ciclo limite

b) qualsiasi traiettoria che abbia inizio in un punto nel ciclo limite deve stare entro il ciclo limite anche in seguito

c) deve esistere un numero positivo ε tale che ciascuna traiettoria che abbia inizio entro $\delta(\varepsilon)$ del ciclo limite deve avvicinarsi asintoticamente al ciclo limite

d) per ogni numero positivo ε deve esistere un numero positivo $\delta(\varepsilon)$ tale che una traiettoria sia garantita stare entro e del ciclo limite semplicemente richiedendo che abbia inizio entro $\delta(\varepsilon)$ del ciclo limite.

In sintesi, se alcune traiettorie convergono in qualche punto, l'insieme degli stati iniziali di tali traiettorie generate è detto regione di attrazione del punto. Una regione di attrazione è in definitiva un insieme di punti nello spazio degli stati di diametro finito tale per cui ogni traiettoria entra e non esce più.

1.6 Logica e caos

Lo studio dei comportamenti caotici è entrato negli ultimi tempi anche nel campo della logica. Possiamo trovare alcuni esempi rilevanti nell'analisi dei paradossi semantici e degli enunciati autoreferenziali. Prendiamo subito un esempio concreto da uno dei paradossi più famosi e studiati della storia della logica, e della filosofia in generale: il paradosso del mentitore [STW89].

L'enunciato "*questa affermazione è falsa*" è autoreferenziale: infatti, se è vero allora è falso, e se è falso allora è vero. Dà a se stesso un valore di verità che in un sistema logico a due valori non può essere calcolato senza cadere in contraddizione.

Dopo i diversi tentativi di superare l'inconveniente tramite le logiche polivalenti, recentemente si è cercato di applicare la *logica fuzzy*. In un sistema di logica fuzzy applicata al paradosso del mentitore si può partire dall'affermazione che la stessa pretesa di dire sempre il falso è già una mezza verità. Riprendiamo l'enunciato di prima:"Questa affermazione è falsa ". Indichiamo da adesso l'enunciato con P, e con p il suo valore di verità che in logica a due valori di verità sarà uguale a

$$P = 1 - p$$

Questo perché se P è vero, allora la sua negazione, non-P, è falsa, e il suo valore di verità è 0. Ora, 1 - 0 = 1 e 1 - 1 = 0; pertanto, se il valore di verità di P è p, allora il valore di verità di non-P è 1 - p. Da qui nasce il paradosso: se p = 0, allora P ci dice che p = 1 - 0 = 1; e se p = 1, allora P ci dice che p = 1 - 1= 0; in entrambi i casi c'è una contraddizione. In logica fuzzy possiamo evitare il paradosso dando il valore

$$p = 0{,}5$$

L'uso di una logica dinamica ci obbliga a correggere di volta in volta la stima del valore di verità dell'enunciato in oggetto. Il valore assegnato prima di p = 0,5 è l'unico che non porta a una oscillazione: se si fosse affermato, per esempio, che P è vera al 30 per cento, avremmo trovato una continua oscillazione di p = 0,3, corretto poi in p = 0,7, nuovamente corretto con p = 0,3, e così via con una successione infinita di valori di verità che oscillano tra 0,3 e 0,7. Per vedere come la logica fuzzy ci possa essere utile per osservare e controllare sistemi caotici nella logica e nella semantica prendiamo un altro esempio. Consideriamo l'enunciato seguente:

"Platone è un buon giocatore di golf "

che indicheremo con *S*. Affermiamo che il valore di verità di S sia s = 0,4. Ora consideriamo anche questo secondo enunciato T :

"S è vero al 100%"

Se T fosse vero al 100%, allora S sarebbe anche vero al 100%, ma abbiamo stabilito che S non è vero al 100%. Il grado di verità di T, che riguarda S, dipende dall'effettivo valore di verità di S e dal valore di verità attribuito a S da T. Più la mia valutazione sarà quindi imprecisa, più falsa diventa la mia affermazione. Sappiamo che s = 0.4, ma secondo T il valore è 1. La differenza in questo caso è pari a 0,6, quindi T è falso nella misura del 60%, cioè è vero al 40%. Se avessi detto che S è vero al 50% la differenza sarebbe stata del solo 10%, quindi T sarebbe stato vero al 90%. Logicamente, se avessi detto che S è vero al 40%, avrei avuto ragione al 100%.

Riassumendo, se supponiamo che io abbia un enunciato P con valore di verità p e un enunciato Q che ci porta a stimare in più il valore di verità di P, il valore di verità di Q è:

$$q = 1 - |p - p'|$$

che sarà la nostra formula di stima. Possiamo quindi formulare l'enunciato del mentitore caotico. Questo enunciato è tanto vero quanto viene stimato falso. Se il suo valore di verità è - c allora esso ci dice di stimare un valore di verità pari a 1-c.

Secondo la formula di stima il suo valore di verità è:

$$1 - |c - (1 - c)| = 1 - |1 - 2c|$$

Ci troviamo così di fronte a un processo dinamico

$$c = 1 - |1 - 2c|$$

di ricalcolo del valore di verità di c. Scegliamo due valori di partenza qualsiasi, per esempio c = 0,12345 e c = 0,12346. Scopriremo che i valori successivi sono caotici. Se sostituiamo il valore di partenza con:

$$c = 1 - |0,999999 - 2c|$$

possiamo osservare anche il famoso effetto farfalla. Naturalmente dobbiamo evitare che il calcolo si stabilizzi con arrotondamenti su 0 o 1. In conclusione, si parte dall'idea del calcolo del valore di verità di un insieme di enunciati autoreferenziali e si accede a un processo dinamico al quale si possono applicare le tecniche della teoria del caos.

Un simile approccio, che Grimm [GRI96] chiama geometrico per via delle associazioni possibili con i frattali di Mandelbrot, permetterebbe di distinguere tra sistemi differenti di enunciati autoreferenziali, e di dimostrare che non esiste nessuna procedura decisionale che possa dirci se un sistema dato sia caotico o no.

1.7 I frattali

I *frattali* sono figure matematiche dotate di dimensioni frazionarie e non intere, come invece accade per le figure della geometria Euclidea dove le rette hanno dimensione uno, i piani hanno dimensione due.

Il termine frattale, coniato nel 1975, è stato tratto dal latino fractus, da frangere, cioè rompere. Fu nel 1983 che il concetto di frattale acquisì vastissima notorietà presso i matematici, gli scienziati e il pubblico non specializzato, con la pubblicazione dell'opera pionieristica *The Fractal Geometry of Nature* del matematico Mandelbrot [MAN83].

I frattali sono molto di più che una semplice curiosità matematica : infatti essi offrono un metodo assai conciso per descrivere oggetti e formazioni. Molte strutture hanno una regolarità geometrica, detta *invarianza* o *autosomiglianza* rispetto al cambiamento di scala, infatti, se si esaminano questi oggetti a scale diverse si incontrano sempre gli stessi elementi fondamentali. Questa configurazione ripetitiva definisce la dimensione frazionaria, o frattale, dell'oggetto.

I frattali sembrano rispecchiare nello spazio la complessità del comportamento dei sistemi caotici nel tempo. Benché non esistano in natura insiemi frattali in senso stretto, come non esistono rette o piani geometrici, alcuni oggetti naturali posseggono una struttura che approssima quella di tali insiemi.

Se prendiamo, ad esempio, una pianta ed ingrandiamo un singolo ramo, notiamo che esso ha una forma simile a quella dell'intera pianta, se prendiamo un rametto di questo ramo, e poi una foglia del rametto con le sue venature, ci accorgiamo che ogni volta la parte presenta una certa somiglianza con l'intero. Opportunamente stilizzati, le venature della foglia, il ramo, l'albero, hanno più o meno la stessa forma.

Fig. 1. *Frattale*

Questa proprietà di somiglianza della parte col tutto caratterizza gli insiemi frattali ed è chiamata *invarianza* di scala, perché l'insieme risulta essenzialmente invariante ad ogni ingrandimento, cioè a qualunque scala è osservato.

Naturalmente, negli oggetti reali l'invarianza di scala deve arrestarsi a un certo punto, mentre solo negli oggetti matematici può sussistere a tutte le scale. La proprietà dell'invarianza di scala ha un significato estremamente importante, in quanto l'informazione per costruire l'intero insieme è tutta contenuta in una qualunque sua parte, per quanto piccola essa sia.

Definiamo in tal modo la dimensione D di un oggetto, l'esponente che mette in relazione la sua estensione b con la distanza lineare r:

$$b \propto r^{D}$$

L'estensione b può riferirsi ad una distanza lineare, area, volume, o quantità di informazione in bit. Per una linea $b \propto r^{1}$, ed infatti una linea ha dimensione 1, per un piano $b \propto r^{2}$. Passando ai logaritmi si ottiene la seguente formula:

$$D = \lim_{r \to 0} (\log(b)/\log(r)).$$

1.8 Applicazioni della teoria del caos alla cardiologia

L'equilibrio nei fenomeni dinamici poggia sul rapporto tra caos e non caos, il che comporta la necessità di riformulare il concetto di stabilità nelle dinamiche della materia organica ed inorganica, per questo, il biologo ed il medico debbono riconsiderare l'omeostasi * *(vedi termine del paragrafo per la definizione*) inteso come equilibrio tra le componenti caotiche ed ordinate dei fenomeni biologici.

Ci si può chiedere a questo punto se i modelli del caos possano essere applicati allo studio della patogenesi delle malattie. La risposta è positiva ed in questo capitolo si forniranno alcuni esempi di tale nuovo approccio alla patologia. Le considerazioni che seguiranno sono sviluppate in gran parte sulla base di un ragionamento teorico e analogico che, per quanto suggestivo e utile a costruire modelli, deve essere sostanziato da dimostrazioni sperimentali per potersi dire a pieno titolo scientificamente fondato. Tali dimostrazioni si stanno oggi accumulando, ma si tratta pur sempre di studi-pilota e preliminari, la cui importanza per quanto riguarda una possibile applicazione clinica su larga scala resta ancora da determinare.

La caoticità di ogni sistema conferisce ad esso la flessibilità tale da poter variare con facilità, il proprio comportamento. Un esempio tipico di questo fenomeno di adattabilità sono le modificazioni del *ritmo cardiaco*. A questo proposito è stato riportato [GOLD96] che la frequenza cardiaca di un individuo sano varia nel tempo con periodicità intrinsecamente caotica e non, come si riteneva finora, secondo un normale ritmo sinusale influenzato solo dai sistemi omeostatici.

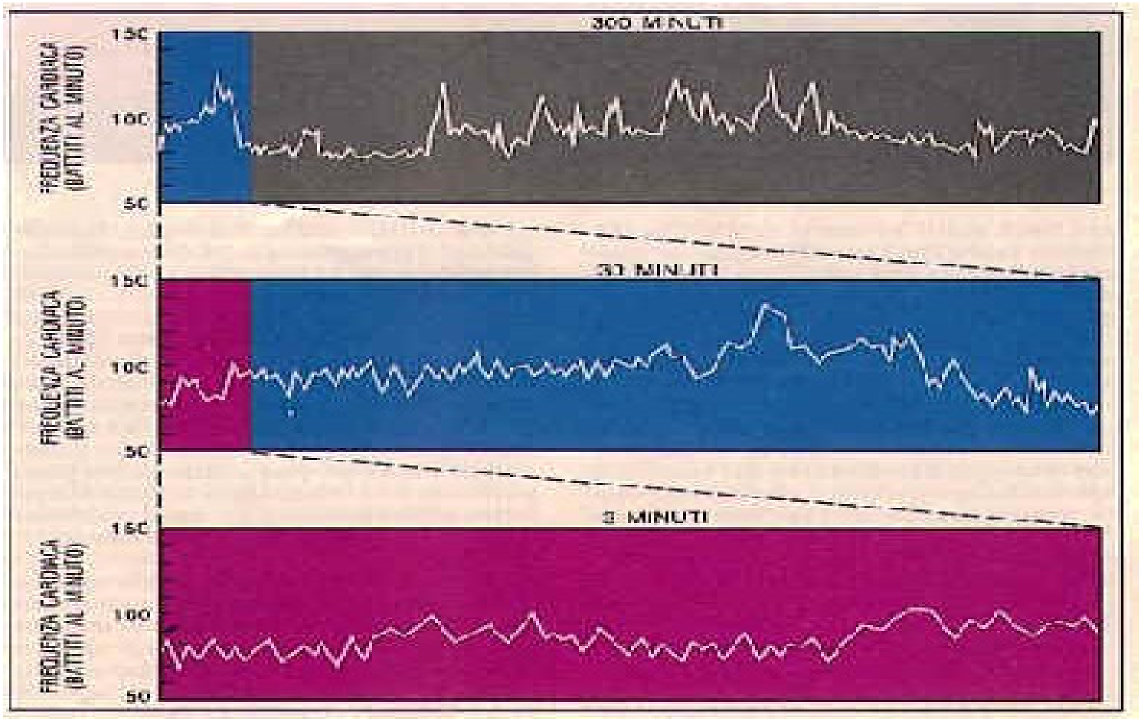

Fig. 2. *Battito cardiaco normale*

Osservando tali variazioni secondo scale temporali diverse, ore, minuti, e secondi si vedono fluttuazioni simili, che ricordano un comportamento frattale, nel dominio del tempo anziché in quello dello spazio.Non si tratta, ovviamente, di aritmia, ma di oscillazioni del ritmo normale. Il battito cardiaco normale non è perfettamente regolare nei soggetti sani, ma presenta ampie variazioni che mostrano dinamiche caotiche.

NOTA: Omeostasi (*)

Il concetto di omeostasi, rappresenta la capacità dell'organismo nel suo insieme o di sue sub-componenti di conservare costanti, o meglio variabili entro determinati limiti, dei parametri biochimici o delle funzioni in modo che tali parametri e tali funzioni concorrano al buon funzionamento dell'organismo nel suo insieme.

1.9 Conclusioni e prospettive

La malattia, in questa visione, sarebbe la perdita dell'equilibrio, o della capacità di assorbire le perturbazioni. Si è visto invece che questa cornice concettuale, pur non sostanzialmente errata in linea generale, non consente di inquadrare nella loro giusta luce né molti fenomeni non-lineari che fanno parte integrante della omeostasi, né precisi esempi di fenomeni sicuramente patologici che si manifestano con aumento di regolarità e semplificazione delle strutture. Siamo quindi oggi in quella situazione, tipica del procedere della scienza, per cui nuove scoperte generano nuove ipotesi interpretative ed i nuovi modelli spingono sempre più ricercatori a rivalutare fenomeni prima considerati marginali ed a progettare nuovi esperimenti per testare il modello stesso.

Nella nostra tesi si è utilizzato un approccio matematico, ma risulta chiaro che *nessuna formula matematica può simulare esattamente il comportamento di un sistema vivente*, fatto di molte componenti tra loro in stretta e dinamica interrelazione. Tuttavia, un algoritmo matematico semplice mette certamente in luce alcune specifiche proprietà legate alla regolazione omeostatica e, quindi, consente di fare alcune affermazioni di carattere generale con il supporto di una dimostrazione matematica, nonché di effettuare alcune previsioni, come quella che consente di poter prevedere che una minima variazione delle condizioni di un sistema caotico ne modifica il comportamento in modo sensibile e imprevedibile. Anche *cercare di* *prevedere l'imprevedibilità ed assegnarne i limiti può essere considerato una operazione scientificamente seria e spesso tecnicamente utile.*

Quindi, mentre i sistemi caotici possono in realtà sembrare casuali, stocastici, in realtà essi sono deterministici e, entro certi limiti, prevedibili. Ciò che sembra casuale può invece essere un ordine complesso, non lineare, deterministico, altamente sensibile alle perturbazione.

In conclusione, introdurre i concetti di caos e di complessità nel campo della medicina costituisce un aiuto ad interpretare fenomeni che finora erano considerati talmente complicati da poter essere affrontati unicamente con il classico metodo analitico-riduttivo, ossia scomporli nelle loro parti le quali poi possano essere analizzate una per una. Se il metodo riduttivo è stato ed è fondamentale per la conoscenza dei singoli particolari, le metodologie introdotte dallo studio dei sistemi caotici e dei frattali sono e saranno sempre più importanti per la comprensione del funzionamento dei sistemi in cui molti singoli particolari sono integrati in un quadro strutturale o funzionale d'insieme. Scrive Prigogine [PRI89]:

''Il nostro universo fisico non ha più come simbolo il moto regolare e periodico dei pianeti, moto che è alla base della meccanica classica. E' invece un universo di instabilità e fluttuazioni, che sono all'origine dell'incredibile ricchezza di forme e strutture che vediamo nel mondo intorno a noi. Abbiamo quindi bisogno di nuovi concetti e nuovi strumenti per descrivere una natura in cui evoluzione e pluralismo sono divenute le parole fondamentali''.